

ANALISIS KETIDAKSTABILAN PARAMETRIK MEKANISME EMPAT BATANG ELASTIK

Syamsul Huda⁽¹⁾, Andi Isra Mahyuddin⁽²⁾

⁽¹⁾Jurusan Teknik Mesin, Fak. Teknik - Universitas Andalas
Kampus Limau Manis, Padang 25163
e-mail: syamsulhuda@ft.unand.ac.id

⁽²⁾Departemen Teknik Mesin, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung 40132
e-mail: aim@ms.itb.ac.id

Abstrak

Perbaikan produktivitas antara lain dapat dicapai melalui peningkatan kecepatan operasi mesin produksi. Sebagai akibatnya, fleksibilitas komponen tidak lagi dapat diabaikan. Hal ini mengakibatkan kekakuan batang berubah terhadap posisi sehingga dapat menimbulkan eksitasi parametrik. Penelitian ini mengkaji perilaku dinamik sebuah batang penghubung elastis pada mekanisme 4-batang. Deformasi transversal batang elastis tersebut diatur oleh persamaan diferensial parsial nonlinier dengan koefisien berubah-waktu. Persamaan ini diselesaikan melalui proses linearisasi dengan metode perturbasi dan solusi kemudian diperoleh dengan menggunakan algoritma solusi tunak. Kestabilan dinamik dievaluasi berdasarkan teori Floquet. Hasil analisis disajikan dalam bentuk peta kestabilan parametrik, dan validasi analisis kestabilan dinamik dilakukan dengan bantuan metode integrasi langsung. Pengaruh gaya luar, redaman dan nisbah massa batang pengikut terhadap batang penghubung juga ditinjau. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa adanya gaya luar tarik, peningkatan redaman, dan nisbah massa menambah kestabilan batang penghubung elastik.

Abstract

The need to increase operational speed and reduce the inertia effects led to the design of slender members. Consequently, elasticity of these members could no longer be neglected. The elasticity results in varying stiffness of the elastic member leading to parametric excitation. The dynamic behavior of an elastic coupler of a four-bar mechanism is investigated. The governing equation is nonlinear, partial differential equation with time-varying parameters. Perturbation method is employed to linearize the equation and the dynamic response is obtained using a closed-form numerical solution algorithm constructed through the discretization of the parameters continua. The dynamic stability of the system is evaluated based upon Floquet Theory. The results are presented in the form of parametric stability charts, and the dynamic stability analysis results were validated by a direct-integration method. The response become unstable at several bands of frequency. The effects of external force, damping and ratio of follower-to-coupler mass were examined. Results show that increase in tensile force, damping, and the mass ratio increased the stability of the elastic coupler.

Keywords: elastic mechanism, parametric instability, steady-state solution algorithm

1. PENDAHULUAN

Kebutuhan peningkatan kecepatan mekanisme untuk peningkatan produktivitas menyebabkan pengaruh inersia menjadi tidak dapat diabaikan. Salah satu cara untuk mengurangi pengaruh ini adalah dengan membuat komponen mekanisme seringan mungkin melalui reduksi dimensi. Namun, konstruksi yang ramping tersebut menyebabkan faktor elastisitas batang tidak lagi dapat diabaikan sehingga karakteristik dinamik batang berubah terhadap posisi.

Sebagai konsekuensi kekakuan batang yang berubah terhadap posisi, perilaku dinamik batang elastik diatur oleh persamaan diferensial parsial nonlinier dengan koefisien yang berubah-waktu (*time-varying*). Hal ini menyebabkan solusinya tidak dapat diperoleh secara analitik. Metode perturbasi dapat digunakan untuk melinierkan persamaan gerak. Solusi persamaan yang

telah dilinierkan ini dapat diperoleh dengan menggunakan algoritma solusi tunak (*steady-state solution algorithm*) [1].

Salah satu ciri sistem yang mempunyai persamaan gerak berkoefisien berubah-waktu adalah ketidakstabilan parametrik yang dapat terjadi pada berbagai pita frekuensi [2]. Berbagai kasus menarik telah diteliti, misalnya Farhang [1], melakukan analisis terhadap mekanisme engkol peluncur dengan batang penghubung dan poros engkol fleksibel, Hsiao dan Yang [3], mengkaji pengaruh kurva awal terhadap kestabilan pada batang elastik. Beale dan Lee [4], melakukan penelitian tentang perilaku dinamik mekanisme engkol peluncur akibat batang penghubung fleksibel dengan metode elemen hingga. Mahyuddin dan Midha [5], menganalisis bahaya instabilitas parametrik pada mekanisme *Cam-Follower*.

Penelitian ini menyelidiki pengaruh beberapa parameter terhadap ketidakstabilan parametrik mekanisme empat batang dengan batang penghubung elastik. Parameter yang dikaji adalah perbandingan panjang batang engkol (*crank*) terhadap batang penghubung (*coupler*), μ , perbandingan massa batang penghubung terhadap pengikut (*follower*), S . Di samping itu, ditinjau juga pengaruh redaman, η , terhadap kestabilan dinamik sistem.

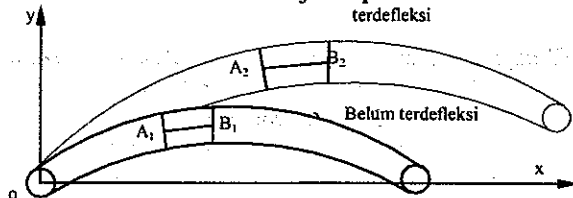
Hasil analisis kestabilan parametrik terhadap parameter frekuensi dan amplitudo dipetakan pada bidang 2-dimensi. Amplitudo frekuensi merupakan perbandingan kecepatan engkol terhadap frekuensi pribadi ekuivalen, sedangkan amplitudo eksitasi adalah perbandingan panjang engkol dan penghubung, μ . Amplitudo respon titik tengah batang penghubung diperoleh dengan algoritma solusi tunak dan kemudian dibandingkan dengan respon yang diperoleh melalui integrasi langsung dengan metode Runge-Kutta.

2. PERSAMAAN GERAK BATANG ELASTIK

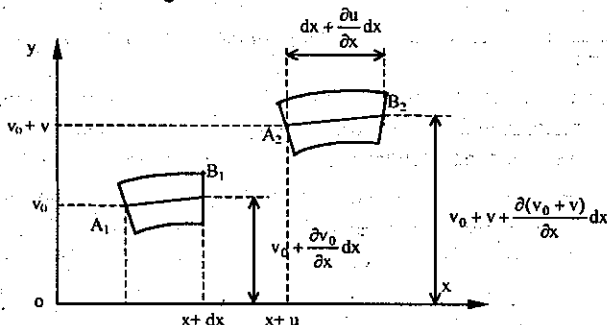
Persamaan gerak batang diturunkan berdasarkan asumsi batang adalah balok Euler-Bernoulli.

2.1 Persamaan Keseimbangan

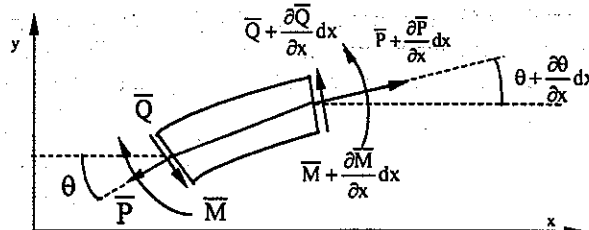
Keseimbangan diamati untuk posisi batang elastik sebelum dan sesudah terdeformasi seperti terlihat pada Gambar 1. Posisi satu elemen (AB) sepanjang dx untuk dua posisi tersebut disajikan secara lebih rinci pada Gambar 2, di mana u dan v menyatakan defleksi dalam arah aksial, x , dan transversal, y , sedangkan v_0 menyatakan kelengkungan awal batang. Diagram benda bebas elemen AB disajikan pada Gambar 3.



Gambar 1 Batang elastik sebelum dan sesudah terdeformasi.



Gambar 2 Deformasi elemen di batang elastik.



Gambar 3 Diagram benda bebas batang elastik.

Diagram benda bebas elemen AB, menghasilkan persamaan keseimbangan gaya dan momen berikut:

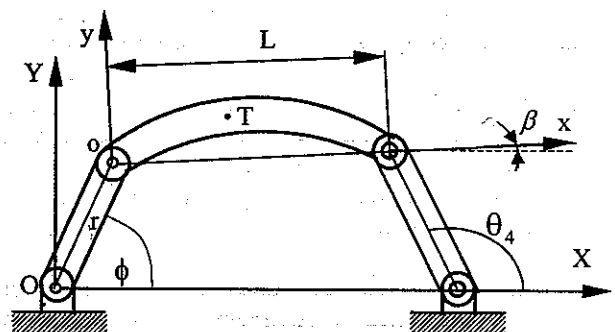
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \gamma A a_x \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial(v+v_0)}{\partial x} \right) = \gamma A a_y \quad (2.2)$$

$$Q + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

di mana P , Q dan M berturut-turut adalah gaya aksial, gaya lintang dan momen lentur, sedangkan γ dan A adalah massa jenis dan luas penampang batang. Komponen percepatan dalam arah aksial dan transversal sembarang titik, T , pada batang elastik dalam koordinat lokal (oxy) seperti diperlihatkan pada Gambar 4 dinyatakan sebagai a_x dan a_y . Substitusi Persamaan(2.3) ke persamaan (2.2) memberikan:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial(v+v_0)}{\partial x} \right) = \gamma A a_y \quad (2.4)$$



Gambar 4 Mekanisme empat batang.

2.2 Persamaan Gaya dan Defleksi

Batang elastik dapat dimodelkan sebagai gabungan sistem yang memiliki kekakuan dan redaman. Redaman yang terjadi diasumsikan viskoelastik linear. Salah satu yang sering digunakan adalah model Kelvin-Voigt [1], yang memberikan hubungan tegangan dan regangan sebagai berikut:

$$\sigma_n = E \epsilon_n + \eta \frac{\partial \epsilon_n}{\partial t} \quad (2.5)$$

di mana σ_n dan ϵ_n menyatakan tegangan dan regangan aksial batang sehingga gaya aksial yang terjadi dapat dinyatakan sebagai:

$$P = A \sigma_n = EA \epsilon_n + \eta A \frac{\partial \epsilon_n}{\partial t} \quad (2.6)$$

Persamaan momen model Kelvin-Voigt [1] adalah sebagai berikut:

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (2.7)$$

Regangan yang terjadi dapat dinyatakan dalam defleksi aksial dan transversal batang sebagai berikut:

$$\epsilon_n = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (2.8)$$

2.3 Percepatan

Koordinat titik sembarang T di batang elastik dalam sistem koordinat global OXY (lihat Gambar 4) adalah:

$$X_T = r \cos \phi + (x + u) \cos \beta + (v + v_0) \sin \beta \quad (2.9)$$

$$Y_T = r \sin \phi - (x + u) \sin \beta + (v + v_0) \cos \beta \quad (2.10)$$

Diferensiasi Persamaan (2.9) dan (2.10) dua kali terhadap waktu memberikan percepatan, a_x dan a_y , yang dalam koordinat lokal (oxy) dapat dinyatakan sebagai:

$$a_x = -r \cos(\phi + \beta) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - r \sin(\phi + \beta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (x + u) \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial t} + (v + v_0) \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

$$a_y = -r \sin(\phi + \beta) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + r \cos(\phi + \beta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (x + u) \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial t} - (v + v_0) \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

2.4 Persamaan Gerak Batang Elastik

Persamaan gerak batang elastik diperoleh dengan memasukkan Persamaan (2.6) dan (2.7) ke Persamaan (2.1) dan (2.4) sehingga menghasilkan:

$$EA \frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial x} + \eta A \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial x} \right) = \gamma A a_x \quad (2.13)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \eta I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(EA \bar{\epsilon}_n + \eta A \frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial t} \right) \frac{\partial (v_0 + v)}{\partial x} \right] = \gamma A a_y \quad (2.14)$$

Untuk memudahkan evaluasi yang dapat berlaku umum melalui variasi eksitasi parametrik, dilakukan proses nondimensionalisasi. Persamaan (2.13) dan (2.14) dapat dinyatakan dalam bentuk tuna-dimensi [6] berikut:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial \rho} + \frac{\Gamma \omega_0}{\omega_T} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial \rho} \right) = \frac{\omega_0^2 \lambda^2}{\omega_T^2} \bar{a}_x \quad (2.15)$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \rho^4} + \frac{\Gamma \omega_0}{\omega_T} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \rho^4} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\bar{\epsilon}_n + \frac{\Gamma \omega_0}{\omega_T} \frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial \tau} \right) \frac{\partial (\bar{v}_0 + \bar{v})}{\partial \rho} = - \frac{\omega_0^2 \lambda^2}{\omega_T^2} \bar{a}_y \quad (2.16)$$

Parameter tuna-dimensi yang digunakan adalah:

$$\bar{u} = \frac{u}{L}; \bar{v} = \frac{v}{L}; \mu = \frac{L}{r}$$

$$\tau = \omega_0 t; \lambda^2 = \left(\frac{\omega_T}{\omega_L} \right)^2 = \frac{I}{AL^2}; S = \frac{mL}{M}; \Gamma = \frac{\eta \omega_T}{E}$$

$$\omega_T^2 = \frac{EI}{mL^4}; \omega_L^2 = \frac{EA}{mL^2}; m = \gamma A; \lambda = \frac{\omega_t}{\omega_L}$$

di mana ω_T, ω_L, m dan M berturut-turut menyatakan frekuensi pribadi transversal dan longitudinal, massa batang penghubung dan massa peluncur. Selanjutnya dengan menggunakan metode peturbasi di mana u, v dan v_0 dinyatakan dalam deret λ dan menggunakan

parameter tuna dimensi $\rho = \frac{x}{L}$, maka Persamaan (2.15) dan (2.16) dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial \rho} + \frac{\Gamma \omega_0}{\omega_T} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial \rho} \right) = \frac{\omega_0^2 \lambda^2}{\omega_T^2} \left[-\frac{1}{\mu} \cos(\phi + \beta) \ddot{\phi} - \frac{1}{\mu} \sin(\phi + \beta) \ddot{\phi} - \rho \ddot{\beta} \right] \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2} + \frac{\Gamma \omega_T}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\omega_T^2}{\omega_0^2} \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \rho^4} + (g_1(\tau) + \rho \beta^2) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \rho} + \\ & \left(g_1(\tau) \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \beta^2 - \frac{\omega_T^2 h(\tau)}{\omega_0^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \rho^2} - \beta^2 \bar{v} + (g_1(\tau) + \rho \beta^2) \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \rho} + \\ & \left(g_1(\tau) \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \beta^2 - \frac{\omega_T^2 h(\tau)}{\omega_0^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial \rho^2} - \beta^2 \bar{v}_0 - g_2(\tau) - \rho \ddot{\beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Integrasi Persamaan (2.17) menghasilkan persamaan gerak batang elastik berikut:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_n + \frac{\Gamma \omega_0}{\omega_T} \frac{\partial \bar{\epsilon}_n}{\partial \tau} = & \frac{\omega_0^2 \lambda^2}{\omega_T^2} \left[-\left(\frac{1}{\mu} \cos(\phi + \beta) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{\mu} \sin(\phi + \beta) \dot{\phi} \right) \rho - \frac{1}{2} \rho^2 \beta^2 \right] + \lambda^2 h(\tau) \end{aligned} \quad (2.19)$$

3 MEKANISME EMPAT BATANG

Analisis perilaku elastik pada mekanisme empat batang diperoleh dengan cara yang sama dengan mekanisme engkol peluncur seperti pada penelitian yang dilakukan Farhang [1]. Perbedaannya hanya pada kondisi batas batang elastik.

3.1 Kondisi Batas

Untuk sambungan engsel ideal tuna gesekan pada kedua ujung batang elastik dan engkol kaku sempurna diperoleh kondisi batas untuk batang penghubung mekanisme empat batang sebagai berikut:

Pada ujung $x = 0$

$$u(0, t) = 0 \quad (3.1)$$

$$v(0, t) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.3)$$

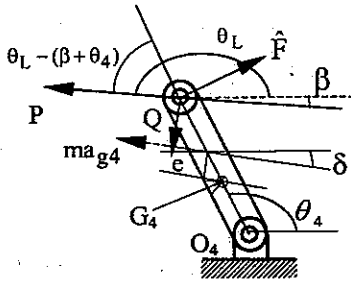
Pada ujung $x = L$, batang elastik bergerak mengikuti lintasan batang pengikut yang kaku sehingga diperoleh kondisi batas berikut:

$$u(L, t) = v(L, t) \tan(\theta_4 - \beta) \quad (3.4)$$

di mana θ_4 adalah sudut batang pengikut, dan

$$\frac{\partial^2 v(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

Persamaan (3.1) – (3.5) memberikan lima kondisi batas sehingga dibutuhkan satu kondisi batas lagi untuk menyelesaikan persamaan gerak batang elastik. Untuk itu, dipilih kondisi keseimbangan momen di engsel batang pengikut seperti diperlihatkan pada Gambar 5.



Gambar 5 Diagram benda bebas batang pengikut.

$$\sum M_{O_4} = 0$$

$$-F_{O_4} \cos \alpha \left(\frac{e}{\cos \alpha} + R_{g_4} \right) - \hat{F} R_B + P \sin(\theta_L - (\beta + \theta_4)) R_B +$$

$$Q \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_L + (\beta + \theta_4) \right) R_B = 0 \quad (3.6)$$

di mana $F_{O_4} = m_{g_4}$ adalah gaya inersia batang pengikut, $\alpha = (\theta_4 + \delta) - \frac{\pi}{2}$, R_{g_4} adalah jarak engsel O_4 ke pusat massa batang 4 (G_4), R_B adalah panjang batang pengikut, dan e menyatakan jarak F_{O_4} ke G_4 serta $\hat{F}$ adalah gaya batang pengikut. Persamaan (3.6) dapat disederhanakan menjadi:

$$-F_{O_4} \cos \alpha \left(\frac{e}{\cos \alpha} + R_{g_4} \right) - \hat{F} R_B +$$

$$P \{ \sin \theta_L \cos(\beta + \theta_4) - \cos \theta_L \sin(\beta + \theta_4) \} R_B +$$

$$Q \{ \cos \theta_L \cos(\beta + \theta_4) - \sin \theta_L \sin(\beta + \theta_4) \} R_B = 0 \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) dapat disederhanakan lebih jauh dengan menyatakan

$$F = \frac{F_{O_4}}{m_3} \cos \alpha \left(\frac{e}{\cos \alpha} + R_{g_4} \right) - \hat{F} R_B \quad (3.8)$$

Substitusi Persamaan (2.3), (2.6) dan (2.7) ke Persamaan (3.7) memberikan:

$$F + \left(EA \epsilon_n + \eta A \frac{\partial \epsilon_n}{\partial t} \right) \left(\frac{-\partial(v + v_0)}{\partial x} \cos(\beta + \theta_4) - \sin(\beta + \theta_4) \right) R_B +$$

$$\left(EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \eta I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \right) \left(\frac{\partial(v + v_0)}{\partial x} \sin(\beta + \theta_4) + \cos(\beta + \theta_4) \right) R_B = 0 \quad (3.9)$$

Persamaan (3.9) dapat disederhanakan menjadi:

$$F + \left(EA \epsilon_n + \eta A \frac{\partial \epsilon_n}{\partial t} \right) \left(\frac{-\partial(v + v_0)}{\partial x} \cos(\beta + \theta_4) - \sin(\beta + \theta_4) \right) R_B +$$

$$\left(EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \eta I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \right) (\cos(\beta + \theta_4)) R_B = 0 \quad (3.10)$$

Dengan membandingkan Persamaan (2.18) dengan Persamaan (3.10), diperoleh besar konstanta integrasi $h(\tau)$ berikut [6]:

$$h(\tau) = \left(\frac{\omega_0}{\omega_T} \right)^2 \left(gl(\tau) + \frac{1}{2} \beta^2 \right) - \frac{F}{AE \sin(\beta + \theta_4)} \frac{1}{R_B} \quad (3.11)$$

$$\text{dengan } gl(\tau) = \frac{1}{\mu} [\cos(\phi + \beta) \dot{\phi}^2 + \sin(\phi + \beta) \ddot{\phi}] \quad (3.11a)$$

3.2 Persamaan Gerak

Persamaan deformasi transversal batang elastik (2.18) dapat diselesaikan dengan menggunakan deret modal. Komponen yang merupakan fungsi τ dan ρ dapat dipisahkan dan selanjutnya penerapan kondisi batas pada Persamaan (3.1) – (3.6) memberikan:

$$\hat{v}(\rho, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i \sin(i\pi\rho) \quad (3.12)$$

di mana T_i menyatakan amplitudo modus ke- i batang elastik dengan fungsi kelengkungan awal

$$\hat{v}_0(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sin(i\pi\rho) \quad (3.13)$$

Substitusi Persamaan (3.12) dan (3.13) ke Persamaan (2.18) dan penyelesaiannya menghasilkan:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ddot{T}_i(\tau) \sin(i\pi\rho) + \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi)^4 T_i(\tau) \sin(i\pi\rho) +$$

$$\frac{\omega_T^2}{\omega_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi)^4 T_i(\tau) \sin(i\pi\rho) + \left(gl(\tau) + \rho \beta^2 \right) \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi) T_i(\tau) \cos(i\pi\rho) -$$

$$\left(gl(\tau) + \frac{1}{2} \rho \beta^2 - \frac{\omega_T^2 h(\tau)}{\omega_0^2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi)^2 T_i(\tau) \sin(i\pi\rho) -$$

$$\beta^2 \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\tau) \sin(i\pi\rho) + \left(gl(\tau) + \rho \beta^2 \right) \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi) C_i(\tau) \cos(i\pi\rho) -$$

$$\left(gl(\tau) + \frac{1}{2} \rho \beta^2 - \frac{\omega_T^2 h(\tau)}{\omega_0^2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi)^2 C_i(\tau) \sin(i\pi\rho) -$$

$$\beta^2 \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\tau) \sin(i\pi\rho) - g2(\tau) - \rho \ddot{\beta} = 0 \quad (3.14)$$

$$\text{dengan } g2(\tau) = \frac{1}{\mu} [\sin(\phi + \beta) \dot{\phi}^2 + \cos(\phi + \beta) \ddot{\phi}] \quad (3.14a)$$

Perkalian Persamaan (3.14) dengan $\sin(j\pi\rho)$ untuk proses ortogonalisasi serta integrasi hasilnya dalam interval $0 \leq \rho \leq 1$ memberikan:

$$\ddot{T}_j(\tau) + \frac{\Gamma \omega_T}{\omega_0} (j\pi)^4 T_j(\tau) + \left[\frac{\omega_T^2}{\omega_0^2} (j\pi)^4 - \frac{1}{2} (j\pi)^2 gl(\tau) - \left(\frac{5}{4} + \frac{(j\pi)^2}{6} \right) \beta + \right.$$

$$\left. \frac{\omega_T^2 h(\tau)}{\omega_0^2} (j\pi)^2 \right] T_j(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} D_{ij} T_i(\tau) = \frac{C_j}{2} (j\pi)^2 gl(\tau) + C_j \left(\frac{5}{4} + \frac{(j\pi)^2}{6} \right) \beta -$$

$$\frac{\omega_T^2 h(\tau)}{\omega_0^2} (j\pi)^2 C_j + \frac{4}{j\pi} O_j g2(\tau) + \frac{2}{j\pi} (1 - O_j) - \sum_{i=1}^{\infty} D_{ij} C_i \quad (3.15)$$

dengan

$$D_{ij} = \begin{cases} \left[-4j \left(gl(\tau) - \frac{\omega_T^2 h(\tau)}{\omega_0^2} \right) + 2i\beta^2 (2O_{i+j} - 1) \right] \frac{i}{i^2 - j^2} + \\ \frac{4i^3 j}{(i^2 - j^2)^2} \left(2gl(\tau) O_{i+j} + \beta^2 (2O_{i+j} - 1) \right); i \neq j \\ 0; i = j \end{cases} \quad (3.16)$$

$$O_n = \begin{cases} 1 & \text{jika ganjil} \\ 0 & \text{jika Genap} \end{cases} \quad (3.17)$$

Persamaan (3.15) merupakan persamaan diferensial amplitudo modulus getar batang elastik.

4. SOLUSI TUNAK DAN KESTABILAN PARAMETRIK

Persamaan (3.15) dapat diselesaikan dengan metode solusi tunak. Metode ini telah banyak digunakan untuk memperoleh respon dinamik sistem, di antaranya oleh Hsu dan Cheng [7], dan Midha *et al.* [8]. Keduanya menyatakan bahwa solusi periodik dapat dibagi menjadi beberapa subinterval di mana parameter dianggap konstan pada tiap subinterval. Selanjutnya, persamaan diferensial orde dua pada Persamaan (3.15) dapat dituliskan sebagai persamaan orde satu berikut:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \quad (4.1)$$

dengan A menyatakan koefisien matriks, $x(t)$ simpangan dan $f(t)$ gaya eksitasi. Untuk sistem periodik berlaku hubungan

$$A(t) = A(T_a + t) \quad (4.2)$$

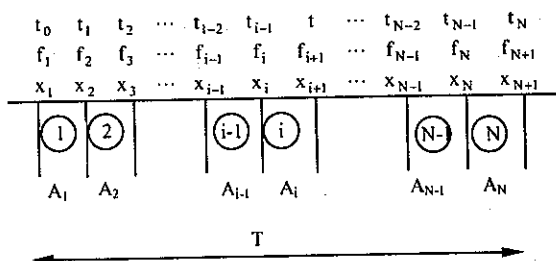
$$f(t) = f(T_f + t) \quad (4.3)$$

dan

$$x(t) = x(T + t) \quad (4.4)$$

dengan T , T_a dan T_f masing-masing menyatakan periode solusi, koefisien matriks A dan gaya eksitasi.

Penyelesaian Persamaan (4.1) di atas dapat dilakukan dengan diskretisasi periode T atas N subinterval dimana elemen matriks A dianggap konstan pada tiap subinterval. Konstanta matriks A dihitung dengan merata-ratakan koefisien matriks tersebut pada kedua ujung interval. Diskretisasi matriks A diilustrasikan pada Gambar 6, di mana dalam subinterval ke- i , elemen matriks A_i adalah konstan.



Gambar 6 Diskretisasi persamaan *state-space*.

Persamaan (4.1) untuk subinterval ke- i menjadi:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + f(t); \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad (4.5)$$

Solusi Persamaan (4.5) diberikan oleh:

$$x(t) = e^{A_i(t-t_{i-1})} x(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t e^{A_i(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

Solusi pada simpul subinterval diberikan oleh:

$$x_{i+1} = x(t_i); \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad (4.7)$$

Persyaratan kompatibilitas pada simpul subinterval, memberikan hubungan berikut:

$$x_{i+1} = e^{A_i \Delta t} x_i - S_i; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

dengan

$$S_i = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{A_i(t_i-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

Persyaratan periodisitas menyatakan solusi berulang setelah satu periode (N subinterval), sehingga hubungan solusi pada subinterval ke-1 dan ke- $N+1$ dapat dinyatakan sebagai:

$$x_1 = x_{N+1} = e^{A_N \Delta t} x_N - S_N \quad (4.10)$$

Kombinasi Persamaan (4.8), (4.9) dan (4.10) untuk satu periode dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} B_1 & -I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -I & 0 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B_{N-1} & -I \\ -I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N-2} \\ S_{N-1} \\ S_N \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

dimana I adalah matriks identitas dan B_i adalah pendekatan deret Taylor $e^{A_i \Delta t}$ dengan jumlah suku n :

$$e^{A_i \Delta t} = B_i = I + \sum_{j=1}^n \frac{(A_i \Delta t)^j}{j!} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.11) dapat disederhanakan dengan menyatakan x_i secara eksplisit dengan mengalikan baris pertama dengan B_2 kemudian ditambahkan ke baris kedua, selanjutnya B_3 dikalikan dengan baris kedua dan dijumlahkan dengan baris ketiga. Langkah ini dilakukan secara berurutan untuk baris lainnya, sehingga Persamaan (4.11) berubah menjadi:

$$\begin{bmatrix} M_1 & -I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ M_2 & 0 & -I & 0 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{N-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & -I & 0 \\ M_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -I \\ M_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{N-2} \\ G_{N-1} \\ G_N \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

dengan

$$G_1 \equiv S_1 \quad (4.14a)$$

$$G_i \equiv S_i + B_i G_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.14b)$$

$$M_i \equiv \prod_{j=1}^i B_j = B_i B_{i-1} B_{i-2} \dots B_2 B_1 \quad (4.14c)$$

Baris terakhir Persamaan (4.13) memberikan

$$x_1 = (M_N - I)^{-1} G_N \quad (4.15)$$

sedangkan solusi pada selang ke- i diperoleh secara berulang berdasarkan hubungan berikut:

$$x_i = M_{i-1} x_1 - G_{i-1} = M_{i-1} (M_N - I)^{-1} G_N - G_{i-1}; \\ i = 2, 3, \dots, N \quad (4.16)$$

M_N merupakan matriks monodromi yang digunakan untuk mengevaluasi kestabilan solusi dengan asumsi periodik. Persamaan (4.16) dapat diselesaikan jika $\det(M_N - I) \neq 0$ (4.17)

4.1 Kestabilan Parametrik

Banyak metode yang dapat digunakan untuk mengevaluasi kestabilan solusi tunak, di antaranya metode Hill's, metode *Perturbation* dan Floquet. Metode Hill's merupakan metode analitik yang sulit diterapkan untuk sistem dengan banyak derajat kebebasan, sebaliknya metode Floquet merupakan pendekatan numerik dan mudah diterapkan untuk sistem dengan banyak derajat kebebasan.

Metode Floquet berdasarkan pada evaluasi *eigenvalue* matriks monodromi [9]. Langkah awal metode tersebut adalah dengan menyatakan persamaan gerak dalam orde satu seperti berikut:

$$\dot{y}(t) = A(t) y(t) \quad (4.18)$$

Solusi Persamaan (4.18) telah dikembangkan oleh Richards [2], yaitu:

$$\phi(t, 0) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_n(t)] [y_1(0) \ y_2(0) \ \dots \ y_n(0)]^{-1} \quad (4.19)$$

$A(t)$ dan $\phi(t)$ adalah matriks dengan ukuran $(n \times n)$ dan y_i merupakan vektor yang berukuran $(n \times 1)$. Substitusi Persamaan (4.18) ke turunan pertama Persamaan (4.19) memberikan

$$\dot{\phi}(t, 0) = A(t) \phi(t, 0) \quad (4.20)$$

di mana $\phi(t)$ adalah periodik, sehingga $\phi(t+T)$ adalah juga solusi dari Persamaan (4.18) dengan hubungan:

$$\phi(t+T, 0) = C \phi(t, 0) \quad (4.21)$$

C merupakan matriks konstan dan T periode $\phi(t)$. Pada $t = 0$, Persamaan (4.21) dapat dituliskan menjadi

$$\phi(T, 0) = C \phi(0, 0) \quad (4.22)$$

Dari Persamaan (4.19) untuk $t = 0$ diperoleh

$$\phi(0, 0) = I \quad (4.23)$$

Dengan memasukkan persamaan (4.23) ke (4.22) didapatkan harga matriks C yaitu:

$$C = \phi(T, 0) \quad (4.24)$$

Persamaan (4.19), (4.24) dan (4.24) memberikan:

$$y(t+T) = C y(t) \quad (4.25)$$

di mana matriks C adalah matriks monodromi yang menghubungkan solusi setelah satu periode, T .

Suatu sistem dikatakan stabil jika respon dinamikanya terbatas untuk $t \rightarrow \infty$. Untuk m periode, Persamaan (4.25) dapat dituliskan sebagai:

$$y(t+mT) = C^m y(t) \quad (4.26)$$

Persamaan (4.26) menunjukkan bahwa karakteristik respon sangat dipengaruhi oleh matriks C .

4.2 Evaluasi Kestabilan Parametrik

Kondisi respon adalah ekuivalen dengan kondisi matriks C^m , sehingga dimungkinkan untuk menganalisis kestabilan melalui evaluasi matriks monodromi C . Matriks C dapat diubah menjadi bentuk *Jordan Canonical* berikut:

$$C = P^{-1} Q P \quad (4.28)$$

atau

$$C^m = P^{-1} Q^m P \quad (4.29)$$

di mana karakteristik matriks C^m diwakili oleh Q^m . Matriks Q adalah matriks diagonal yang mengandung nilai eigen matriks C , λ_i , yang diperoleh dari

$$\det(C - \lambda I) = 0 \quad (4.30)$$

Matriks Q tersebut dapat dituliskan sebagai berikut;

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Suatu sistem akan stabil jika $|\lambda_i| < 1$ dan tidak stabil jika $|\lambda_i| > 1$. Untuk harga $|\lambda_i| = 1$ respon sistem bersifat periodik dengan periode T . Pada kondisi khusus yaitu $\lambda_i = -1$ maka respon periodik dengan periode $2T$.

Matriks monodromi C tersebut dapat dihitung dari persamaan (4.14)

$$C = M_N = \prod_{i=1}^N B_i \approx \prod_{i=1}^N \left(I + \sum_{j=1}^n \frac{(A_i \Delta t)^j}{j!} \right) \quad (4.32)$$

di mana n adalah jumlah suku pendekatan Deret Taylor.

5 ANALISIS DINAMIK MEKANISME EMPAT BATANG

Analisis kestabilan dan respons batang penghubung elastik pada sebuah mekanisme empat batang seperti yang diperlihatkan pada Gambar 4 akan ditinjau dalam bagian ini. Material batang elastik adalah Aluminium (modulus elastisitas, $E = 68$ GPa, dan massa jenis, $\rho = 2700$ kg/m³), sedangkan dimensi mekanisme dirangkum pada Tabel 1.

Tabel 1 Parameter geometri mekanisme empat batang.

Parameter	Dimensi
Jarak Batang satu (<i>ground</i>)	122 mm
Panjang batang penghubung	122 mm
Panjang batang pengikut	101 mm
Massa batang pengikut	0.5 kg
Penampang batang elastis	25 x 1.5 mm

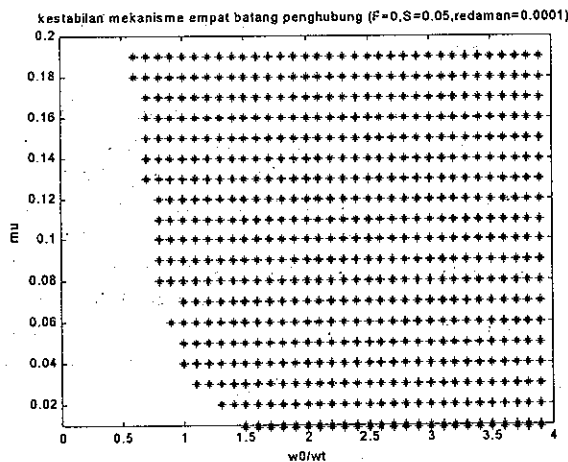
5.1 Peta Kestabilan Parametrik

Kaji kestabilan parametrik dilakukan untuk batang penghubung elastik dengan berbagai variasi parameter amplitudo dan frekuensi yang masing-masing diwakili oleh nisbah panjang engkol terhadap batang penghubung, μ , dan kecepatan putar tuna dimensi, Ω , dengan metode *grid*. Hasil analisis disajikan sebagai peta kestabilan parametrik pada bidang Ω - μ , dengan variasi Ω antara 0 – 4 dan μ antara 0.01 – 0.20. Harga Ω dan μ dimasukkan ke Persamaan (3.15) untuk kemudian *eigenvalue* matriks monodromi, λ_i , dievaluasi. Jika ada $|\lambda_i| > 1$, maka pada koordinat (Ω, μ) diplot tanda *, mengindikasikan ketidakstabilan parametrik untuk kombinasi parameter amplitudo dan frekuensi tersebut.

5.1.1 Pengaruh Redaman

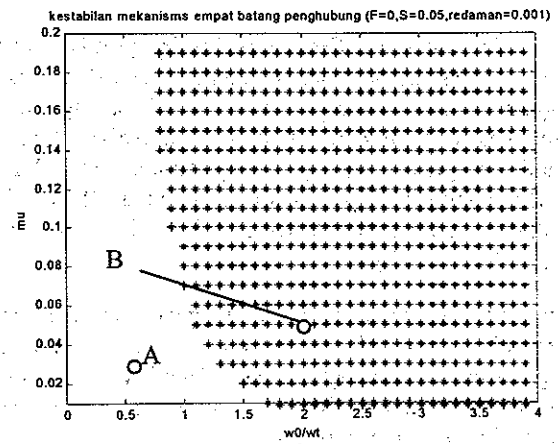
Peta kestabilan parametrik untuk kasus $\hat{F} = 0$ dan $S = 0.5$ disajikan pada Gambar 7 dan 8, berturut-turut untuk faktor redaman, $\eta = 0.0001$ dan 0.001, yang dianggap mewakili redaman internal material. Terlihat bahwa ketidakstabilan dapat terjadi pada parameter frekuensi, $\Omega < 1$, terutama untuk parameter amplitudo yang relatif besar. Perbandingan Gambar 7 dan 8 juga menunjukkan daerah tak-stabil berkurang dengan meningkatnya redaman.

Gambar 7 Peta kestabilan untuk $\hat{F} = 0$, $S = 0.5$, $\eta = 0.0001$.



5.1.2 Pengaruh Gaya Batang Pengikut

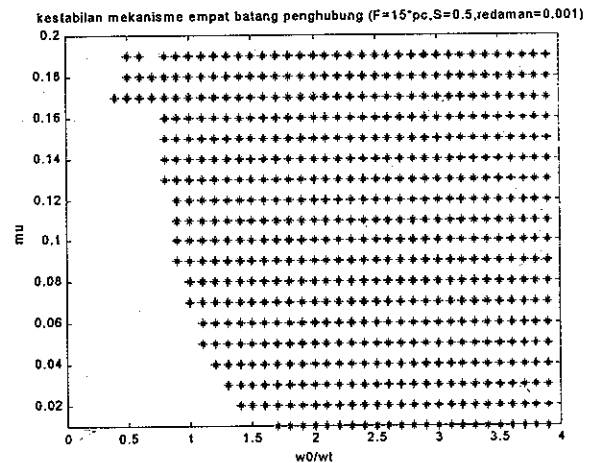
Pengaruh gaya batang pengikut terhadap kestabilan parametrik dipelajari dengan meninjau kasus dengan amplitudo gaya eksitasi sebesar $15 P_c$, di mana P_c adalah beban kritis Euler. Peta kestabilan disajikan pada Gambar 9. Membandingkan Gambar 8 dan 9 terlihat bahwa adanya gaya tarik yang diberikan batang pengikut menjadikan daerah stabil respon batang elastik lebih luas.



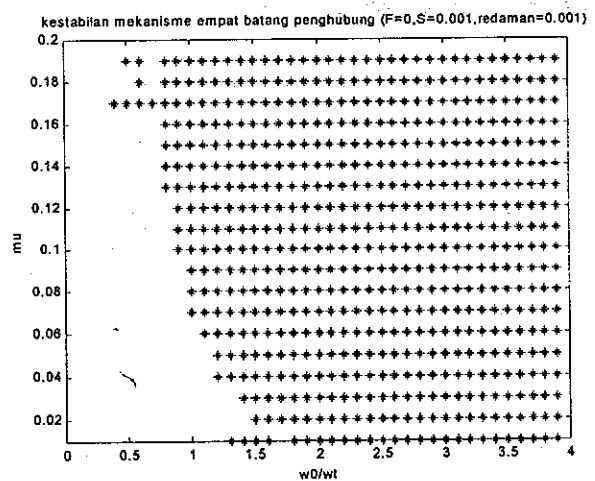
Gambar 8 Peta kestabilan untuk $\hat{F} = 0$, $S = 0.5$, $\eta = 0.001$.

5.1.3 Pengaruh Rasio Massa Penghubung-Pengikut

Pengaruh besarnya massa penghubung ditinjau dengan mengambil rasio, $S = 0.001$ untuk kasus $\hat{F} = 0$ dan $\eta = 0.001$. Peta kestabilan yang diperoleh disajikan pada Gambar 10. Perbandingan Gambar 10 dengan Gambar 8 menunjukkan bahwa makin besar rasio S , makin luas daerah stabil batang elastik.



Gambar 9 Peta kestabilan untuk $\hat{F} = 15 P_c$, $S = 0.5$, dan $\eta = 0.001$.



Gambar 10 Peta kestabilan untuk $\hat{F} = 0$, $S = 0.001$, dan $\eta = 0.001$.

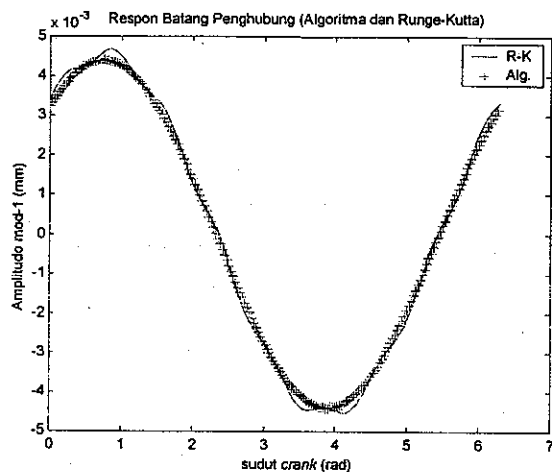
5.2 Validasi Analisis Stabilitas dan Respon Dinamik.

Untuk mengkaji keabsahan analisis stabilitas yang disajikan di atas, maka persamaan gerak batang elastik untuk kasus stabil dan tak-stabil diselesaikan dengan metode integrasi langsung. Runge-Kutta. Untuk kasus stabil ditinjau titik A pada Gambar 8 dengan $\Omega = 0.6$ dan $\mu = 0.03$, sedangkan untuk daerah tak stabil ditinjau titik B ($\Omega = 2, \mu = 0.05$).

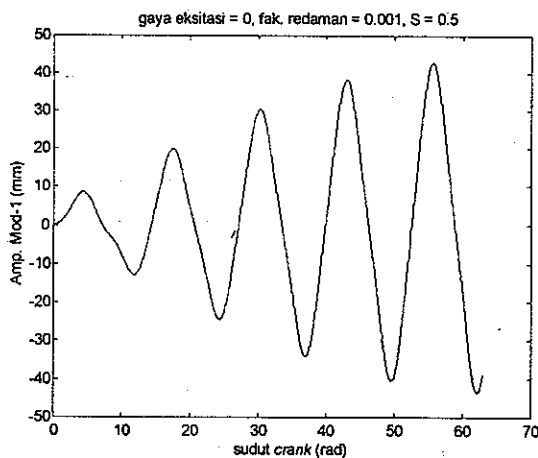
Untuk titik A, amplitudo modus getar pertama yang diperoleh melalui algoritma solusi-tunak dan metode integrasi langsung disajikan pada Gambar 11. Terlihat bahwa respon metode integrasi langsung adalah tunak serta kedua respon bersesuaian.

Respon untuk titik B disajikan dalam Gambar 12. Terlihat bahwa amplitudo respon yang diperoleh melalui metode Runge-Kutta menunjukkan kecenderungan divergen. Hal ini mengindikasikan bahwa respon batang elastik dengan kondisi operasi $\Omega = 2, \mu = 0.05$ adalah tidak stabil.

Solusi modus pertama yang disajikan pada Gambar 11 dan 12 ini mendukung keabsahan analisis stabilitas dinamik dan algoritma solusi-tunak.



Gambar 11 Amplitudo modus pertama batang elastik mekanisme empat batang titik A.



Gambar 12 Amplitudo modus pertama batang elastik mekanisme empat batang kondisi takstabil, titik B.

6 KESIMPULAN

Elastisitas batang penghubung yang mengakibatkan variasi parameter dinamik terhadap posisi membuat sistem dapat mengalami ketidakstabilan parametrik (*parametric instability*). Dalam hal ini, respon sistem dapat menjadi tidak stabil pada berbagai pita frekuensi, bahkan pada kecepatan operasi yang relatif rendah.

Pengaruh variasi parameter μ , S dan η telah diinvestigasi dan dapat disimpulkan beberapa hal berikut:

1. Perbandingan massa batang elastik terhadap peluncur atau batang pengikut sangat berpengaruh terhadap konstruksi peta kestabilan. Harga S yang lebih besar berkorelasi dengan bertambahnya luas daerah stabil pada peta kestabilan parametrik. Hal ini disebabkan karena batang penghubung dengan massa yang lebih besar akan lebih kaku sehingga amplitudo variasi kekakuan yang dihasilkan menjadi lebih kecil.
2. Panjang engkol merepresentasikan parameter amplitudo eksitasi batang elastik. Parameter μ yang relatif besar akan dapat menimbulkan ketidakstabilan parametrik pada frekuensi rendah. Semakin besar harga μ , maka semakin mudah ketidakstabilan parametrik terjadi.
3. Konfigurasi gaya luar juga mempengaruhi kestabilan mekanisme. Gaya tarik cenderung memberikan luas daerah stabil yang lebih besar dibandingkan dengan gaya tekan.
4. Redaman menyebabkan kombinasi parameter yang semula menghasilkan ketidakstabilan dapat menjadi stabil, terutama pada daerah μ kecil. Penambahan redaman mengakibatkan luas daerah tidak stabil berkurang.

Penelitian ini memberikan gambaran tentang perilaku dinamik batang penghubung elastik pada sebuah mekanisme empat-batang. Metodologi yang digunakan dapat diterapkan untuk meninjau perilaku dinamik mekanisme dengan batang elastik lainnya. Analisis kestabilan dapat memberikan gambaran tentang daerah operasi yang aman. Di samping itu, algoritma solusi-tunak dapat digunakan untuk memprediksi amplitudo getaran batang elastik, untuk kemudian dibandingkan dengan batasan yang diperbolehkan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Farhang, K., *Analytical and Experimental Parametric Vibration Stability Studies in Elastic Mechanism*, Ph.D. Dissertation, School of Mechanical Engineering, Purdue University, W. Lafayette, IN, USA, 1989.
2. Richards, J.A., *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*, Springer-Verlag, New York, NY, 1983.

3. Hsiao, K.M. dan Yang, R. T., "Effect Of Member Initial Curvature on a Flexible Mechanism Response", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190(2), 177-194, 1996.
4. Beale, D.G. dan Lee, S. W., "A Numerical Method For Stability Analysis of Pinned Flexible Mechanism", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 192(5), 941-957, 1996.
5. Mahyuddin, A.I., dan Midha, A., "Influence of Varying Cam Profile and Follower Motion Event Types on Parametric Stability of Flexible Cam-Follower Systems", *Journal of Mechanical Design*, Trans. ASME, Vol. 116(1), 298-305, 1994.
6. Huda, S., 2000, *Analisis Ketidakstabilan Parametrik Mekanisme Elastik*, Tesis Magister, Jurusan Teknik Mesin, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
7. Hsu, C.S., dan Cheng, W.-H., "Application of the Theory of Impulsive Parametric Excitation and New Treatments of General Parametric Excitation Problems," *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 41, No. 2, 371-378, 1973.
8. Midha, et al., "A Closed-Form Numerical Algorithm for the Periodic Response of High-Speed Elastic Linkages", *Journal of Mechanical Design*, Trans. ASME, Vol. 101, 154-162, 1979.
9. Hsu, C.S., "On Approximating a General Linear Periodic System", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 45, No. 1, 234-251, 1974.
10. Bolotin, V. V., *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, English Translation, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.
11. Erdman, A. G., *Modern Kinematics (Developments in The Last Fourty Years)*, Wiley Series in Design Engineering, New York, 1993.
12. Mahyuddin, A. I., *A Comparative Stability Study for Flexible Cam-Follower System Due to Varying Cam Profiles*, Master Thesis, School of Mechanical Engineering, Purdue University, W. Lafayette, IN, USA, 1988.